

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

DIPARTIMENTO DI ASTRONOMIA

TESI DI LAUREA DI I LIVELLO



STUDIO DEL PROFILO
DEI VORTICI OTTICI CON
DIVERSO MOMENTO ANGOLARE

Relatore: Prof. CESARE BARBIERI

Correlatore: GABRIELE ANZOLIN
FABRIZIO TAMBURINI

Laureando: BRUNETTO MARCO ZIOSI

ANNO ACCADEMICO 2006-2007

Indice

1	Introduzione	1
2	Campo elettromagnetico	3
2.1	Visione classica: equazioni di Maxwell	4
2.1.1	Soluzioni alle equazioni di Maxwell	4
2.1.2	Densità di energia e vettore di Poynting	7
2.1.3	Intensità e quantità di moto	8
2.1.4	Polarizzazione	9
2.2	Visione quantistica: dualismo onda-corpuscolo	9
3	Il momento angolare	13
3.0.1	Il momento angolare in meccanica classica	13
3.0.2	Il momento angolare in meccanica quantistica	14
3.1	Momento angolare dei fotoni	15
3.1.1	Momento angolare orbitale e momento angolare di spin	17
3.2	I modi di Laguerre-Gauss	18
4	Vortici ottici	21
4.1	Carica topologica e descrizione di un vortice	21
4.2	Produzione dei vortici ottici	24
4.2.1	Maschere di fase	25
4.3	Vortici ottici e momento angolare	28
5	Coronografia	31
5.1	Coronografia e vortici ottici	32
6	Simulazioni al computer	37
7	Prove al banco ottico	45
8	Conclusioni	49

Capitolo 1

Introduzione

Già negli anni '30 si era a conoscenza dell'esistenza di fronti d'onda particolari in cui potevano essere presenti una o più singolarità, solo in questi ultimi anni si è però capito come questi potessero essere notevolmente utili in alcuni campi tecnologici o di ricerca.

I vortici ottici, così vengono chiamate le singolarità caratterizzate da un asse su cui la fase non è definita e da fronti d'onda elicoidali che vi si attorcigliano attorno, vengono attualmente utilizzati in applicazioni legate alle nanotecnologie e alla manipolazione della materia a livello molecolare. Studi recenti e tuttora in corso mirano allo sfruttamento di tali fasci nella realizzazione di strumenti in grado di distinguere deboli sorgenti luminose la cui rilevazione risulta difficoltosa a causa della presenza di sorgenti molto brillanti nelle vicinanze o di rumore causato da luce diffusa.

La tesi si articola, data la complessità del problema, in una parte introduttiva sui fenomeni elettromagnetici e la loro descrizione, a partire dalle equazioni di Maxwell fino ad arrivare alle implicazioni della visione moderna che vede integrarsi gli aspetti ondulatorio e particellare di questo fenomeno.

Successivamente la trattazione si sofferma sul momento angolare e su come sia possibile estendere questo concetto ad un fascio di luce.

L'ultima sezione del capitolo 3 introduce i modi di Laguerre-Gauss, una classe di funzioni utili per una trattazione agevole dei concetti esposti.

Il capitolo 4 approfondisce lo studio dei vortici ottici offrendo una descrizione panoramica sulle caratteristiche di queste singolarità ottiche. Si presentano concetti fondamentali quali la carica topologica, la forma assunta dal fronte d'onda, il comportamento del vettore di Poynting e gli effetti che questi hanno sull'intensità. Vengono inoltre trattati diversi metodi di produzione dei vortici e la dipendenza di questi dal momento angolare orbitale che li ha generati.

In seguito viene approfondito l'argomento della coronografia e di come questa

si avvalga dei vortici ottici per superare i limiti riscontrati nei risultati ottenuti con tecniche classiche. Alcune citazioni ad esperimenti di coronografia a vortici, finora effettuate solo in laboratorio, rendono più chiara la materia trattata e tracciano un profilo di quale sia lo stato attuale delle ricerche in questo campo.

Nel capitolo 6 e 7 sono esposte gli studi effettuati al fine di determinare le tecniche migliori di produzione di vortici per la coronografia. Le simulazioni numeriche, delle quali è possibile osservare alcune rese grafiche, analizzano il comportamento dei vortici generati su fasci di luce al fuoco di un telescopio ad apertura singola a cui vengono imposti diversi momenti angolari orbitali all'interno di un ampio range.

L'ultima sezione è dedicata alle prove effettuate in laboratorio, dove è stato realizzato un banco ottico equivalente ad un telescopio a singola apertura a cui è applicato un coronografo a vortici ottici. Questi esperimenti sono concentrati principalmente attorno a vortici con OAM pari a 2 per motivi di carattere tecnico esposti in seguito.

Capitolo 2

Campo elettromagnetico

In passato Newton considerava la luce come un fascio di particelle in grado di rimbalzare a causa della riflessione su di uno specchio. Successivamente (circa nella prima metà del diciannovesimo secolo) fu dimostrata la natura ondulatoria della luce e l'ottica poté essere integrata nella teoria elettromagnetica. In questo contesto la velocità della luce era legata alle costanti elettriche e magnetiche mentre la polarizzazione era una manifestazione della natura vettoriale del campo elettrico.

Agli inizi del '900, quando la teoria elettromagnetica si trovò insufficiente a spiegare la radiazione di corpo nero, Planck avanzò l'ipotesi di quantizzazione dell'energia per la radiazione elettromagnetica. Generalizzando Einstein propose un ritorno alla teoria particellare (1905), che risultava utile per spiegare diversi fenomeni incomprensibili fino ad allora. Vent'anni dopo, nel 1924, l'effetto Compton dimostrò l'effettiva esistenza del fotone come entità distinta.

La reintroduzione della teoria particellare non segna però l'abbandono di quella ondulatoria, che descrive bene fenomeni quali interferenza e diffrazione: i due aspetti sono entrambi indispensabili per una completa interpretazione del fenomeno. La luce si comporta simultaneamente come onda e come flusso di particelle, laddove l'onda permette di calcolare la probabilità di manifestazione della particella.[26]

2.1 Visione classica: equazioni di Maxwell

I fenomeni elettromagnetici sono descritti attraverso le quattro equazioni:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

Queste, formulate da Maxwell a partire dai lavori di Faraday e Ampère, determinano l'andamento spaziale e temporale dei campi elettrici e magnetici. Vale la relazione $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$.

Nel vuoto $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e la densità di carica elettrica e magnetica sono $\rho = \vec{j} = 0$, non sono presenti cioè cariche elettriche ferme o in moto. In questo caso però perché le soluzioni non siano nulle (perché esista cioè un campo elettromagnetico) è necessario che \vec{E} e \vec{B} oscillino nel tempo[6].

In presenza di mezzi materiali sono necessarie alcune correzioni per tenere conto della polarizzazione e della magnetizzazione dei materiali, che a loro volta generano altri campi elettrici e magnetici. Si usa definire allora il campo spostamento elettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e il campo magnetico \vec{H} con $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ dove \vec{P} è la polarizzazione e \vec{M} la magnetizzazione. Per mezzi lineari e isotropi le relazioni si semplificano in $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, con ϵ_r e μ_r costante dielettrica e permeabilità magnetica del mezzo[25].

2.1.1 Soluzioni alle equazioni di Maxwell

Poiché la divergenza di un rotore è sempre nulla, dall'equazione (2.2) possiamo scrivere[24, 6]

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.5)$$

dove \vec{A} è un campo vettoriale detto *potenziale vettore*, in modo che la (2.3) diventi

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Similmente a quanto fatto sopra, dal momento che il rotore di un gradiente è sempre nullo, è possibile riscrivere quest'ultima equazione come

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \times (-\nabla \phi)$$

ovvero

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (2.6)$$

dove ϕ viene chiamato *potenziale scalare*.
Effettuando le sostituzioni

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (2.7)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (2.8)$$

nelle equazioni (2.5) e (2.6), con Λ una funzione scalare arbitraria, i campi \vec{E} e \vec{B} restano invariati (invarianza di gauge), scegliendo quindi opportunamente \vec{A} e ϕ è possibile riscrivere le equazioni di Maxwell come un'unica equazione, detta di *D'Alembert*:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \square \vec{A} = 0. \quad (2.9)$$

L'equazione generale tridimensionale (2.9) può essere riscritta nelle sue componenti scalari

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

e risulta imponendo le condizioni iniziali e al contorno e trovando come soluzione monodimensionale

$$\psi(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt). \quad (2.10)$$

Questa rappresenta due fronti d'onda che si propagano lungo la stessa direzione ma in versi opposti.

La soluzione dell'equazione tridimensionale sarà una combinazione delle soluzioni (2.10). In particolare risulta utile ricordarne alcune di particolare interesse.

Onde piane

Un'onda piana è caratterizzata dal vettore r_0 , posizione generica sul fronte d'onda, sempre perpendicolare al vettore d'onda \vec{k} , che definisce l'asse di propagazione.

Si ottiene quindi come soluzione

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 e^{[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi)]} \quad (2.11)$$

dove ϕ è un termine di fase. Inoltre risulta[25]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{B} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu\varepsilon i\omega \vec{E} \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

ne segue che

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \times \vec{E} = 2\pi\nu \vec{B} \Rightarrow \vec{\times} \vec{E} = c\vec{B} \quad (2.15)$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \times \vec{B} = -2\pi\nu\mu\varepsilon \vec{E} \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \times \vec{B} = -(\mu\varepsilon)c\vec{E} = -\frac{1}{c^2}c\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{E} \quad (2.17)$$

da cui è evidente che \vec{k} , \vec{B} ed \vec{E} sono una terna ordinata ortogonale, e che le intensità di \vec{B} ed \vec{E} sono legate tra loro attraverso la velocità. n è il versore nella direzione di propagazione.

Riassumendo

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k} \quad (2.18)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \quad (2.19)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B} \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E} \quad (2.20)$$

$$|\vec{E}| = c|\vec{B}|. \quad (2.21)$$

Onde sferiche

In questo caso la soluzione deve avere simmetria sferica e se ci poniamo in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) deve risultare quindi indipendente da θ e ϕ .

Questo porta ad una soluzione per l'equazione d'onda definita come

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_0}{r} e^{[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi)]} \quad (2.22)$$

ovvero fronti d'onda sferici che si propagano in maniera simmetrica rispetto all'origine.

Onde cilindriche

La simmetria cilindrica porta a dover risolvere un'equazione di Bessel, e per grandi r la soluzione di questa può essere approssimata a

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_0}{\sqrt{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi)}. \quad (2.23)$$

2.1.2 Densità di energia e vettore di Poynting

Un campo elettromagnetico comporta una certa quantità di energia distribuita con densità u nello spazio.

Nel vuoto la densità di energia elettromagnetica (e.m.) è

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2 \quad (2.24)$$

mentre se considero una superficie Σ normale alla direzione di propagazione

$$dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt \quad (2.25)$$

è l'energia che passa per Σ in dt , da cui ricavo la potenza

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 c \Sigma \quad (2.26)$$

per un'onda piana. A questo punto è possibile introdurre il vettore

$$\vec{S} = \epsilon_0 E^2 \vec{c} \quad (2.27)$$

chiamato *vettore di Poynting*, dove

$$\mathcal{P} = \Sigma S.$$

Ricordando (2.20) è possibile riscrivere il vettore di Poynting come

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 E B \vec{u} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.28)$$

dove si vede chiaramente che ha direzione e verso coincidenti con quelli di propagazione dell'onda e come modulo il flusso di energia elettromagnetica.

2.1.3 Intensità e quantità di moto

Per motivi pratici (è difficile calcolare flussi istantanei a causa della pulsazione elevata) si preferisce calcolare il valore medio del vettore di Poynting anziché quello istantaneo:

$$S_m = \varepsilon_0 c (E^2)_m = \varepsilon_0 c \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c E_{\text{eff}}^2. \quad (2.29)$$

Si definisce allora intensità di un'onda elettromagnetica la potenza media per unità di superficie trasportata, ovvero, per un'onda piana (polarizzata linearmente)

$$I = S_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 c E_{\text{eff}}^2. \quad (2.30)$$

Nel caso di onde sferiche si ha

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2(r) 4\pi r^2 \quad (2.31)$$

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2}. \quad (2.32)$$

Per un'onda e.m. piana la quantità di moto in media che passa per una superficie unitaria Σ perpendicolare alla direzione di propagazione nell'unità di tempo è

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 E_{\text{eff}}^2 \quad (2.33)$$

che vettorialmente diventa

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (2.34)$$

In esperimenti di laboratorio è stato dimostrato che è possibile cedere interamente questa energia a superfici completamente assorbenti. Si ricava una forza per unità di superficie

$$p_{\text{rad}} = p = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 E_{\text{eff}}^2$$

chiamata pressione di radiazione.

Se la superficie è invece totalmente riflettente si ha un impulso doppio e di conseguenza

$$p_{\text{rad}} = \frac{2I}{c}.$$

2.1.4 Polarizzazione

Un'onda e.m. che si propaghi lungo la direzione z si dice polarizzata linearmente quando il vettore \vec{E} oscilla parallelamente al piano xy formando un angolo θ con l'asse x . La direzione di polarizzazione è data considerando il campo elettrico.

Nella polarizzazione rettilinea si considerano due campi elettrici giacenti sui piani yz e xz , con θ costante.

Il campo risultante può allora essere scritto come

$$\vec{E} = E_0 \cos \theta \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y + E_0 \sin \theta \cos(kz - \omega t) \vec{u}_z = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{u} \quad (2.35)$$

e si ha

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \theta \\ I_x &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \theta = I_0 \sin^2 \theta \\ I &= I_y + I_x = 2I_0 = c \varepsilon_0 E_0^2 \end{aligned}$$

Nella polarizzazione circolare i campi in cui viene scomposta l'onda sono sfasati di π ma hanno uguale intensità, nella polarizzazione ellittica lo sfasamento è arbitrario.

2.2 Visione quantistica: dualismo onda-corpuscolo

Nel secolo scorso lo studio di fenomeni come l'effetto fotoelettrico o l'effetto Compton portarono all'ipotesi di dualità nella natura della radiazione elettromagnetica: la luce poteva essere vista come un insieme di quasi-particelle chiamate fotoni ognuna delle quali trasporta una quantità (quanto) di energia pari $h\nu$, dove h è la costante di Planck e ν la frequenza dell'onda ad esso associata. Lo scambio di energia tra radiazione e materia avviene attraverso questi quanti e non in modo continuo come si era creduto in precedenza[6, 28]. Planck per primo, agli inizi del '900, determinò il valore di questo quanto di energia studiando l'interazione tra radiazione termica e le pareti di una cavità viste come insieme di oscillatori armonici in equilibrio termodinamico. Si può dimostrare anche che i fotoni trasportano una quantità di moto pari a $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, dove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Le relazioni

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (2.36)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (2.37)$$

vengono chiamate relazioni di Planck-Einstein.

È possibile anche uno studio più formale e rigoroso a partire dall'equazione agli autovalori della funzione d'onda del fotone (visto come pacchetto d'onde) per gli operatori quantistici di energia e momento.

Il risultato[6] sono le caratteristiche dinamiche del fotone espresse da energia, momento lineare e momento angolare:

$$E = \int \vec{F}^* \cdot \vec{F} d^3r \quad (2.38)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2ic} \int \vec{F}^* \times \vec{F} d^3r \quad (2.39)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2ic} \int \vec{r} \times (\vec{F}^* \times \vec{F}) d^3r \quad (2.40)$$

dove \vec{F} è il vettore di Riemann-Silberstein

$$\vec{F} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} \vec{E} + i\sqrt{\frac{1}{2\mu_0}} \vec{B} \quad (2.41)$$

e rappresenta una versione dell'equazione d'onda del fotone che deriva dalla soluzione dell'equazione di Dirac.

Introdotta le matrici di spin l'equazione da risolvere (simile all'equazione di Schrödinger), posto $\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r})e^{i\omega t}$, è

$$c \left(\vec{s} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \vec{F} = i\hbar \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \hbar\omega \vec{F}(\vec{r}). \quad (2.42)$$

Il termine tra parentesi rappresenta la proiezione del vettore di spin sul vettore momento lineare, mentre il segno del membro a destra rappresenta una scelta per l'elicità del fotone e quindi per la polarizzazione del fascio (si veda il capitolo successivo).

Se si vuole una soluzione generale questa deve contenere entrambe le possibili elicità e deve perciò essere, nella sua forma finale, del tipo

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} \vec{F}_+(\vec{r}, t) \\ \vec{F}_-(\vec{r}, t) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

La soluzione stazionaria $\Psi(\vec{r}, t)$ dell'equazione soddisfa anche le equazioni agli autovalori degli operatori hamiltoniano \hat{H} , momento lineare \hat{P} e momento angolare lungo l'asse z \hat{J}_z :

$$\hat{H}\Psi = c \left(\vec{s} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \Psi = \hbar\omega \quad (2.44)$$

$$\hat{P}\Psi = \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi = \hbar k \Psi \quad (2.45)$$

$$\hat{J}_z \Psi = \left(\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla + \hbar \vec{s} \right)_z \Psi = \hbar j \Psi. \quad (2.46)$$

Si noti che nell'equazione (2.46) compare il termine di spin assieme a quello di momento angolare orbitale (OAM), non sempre separabili in modo chiaro. La polarizzazione quantisticamente è in relazione con gli spin degli elettroni che compongono il fascio.

Sebbene infatti la polarizzazione della luce e lo spin dei fotoni siano intimamente legati non sono esattamente la stessa cosa. L'asse dello spin del fotone è sempre parallelo alla direzione di propagazione, al contrario l'asse di polarizzazione è sempre perpendicolare a quest'ultimo. La polarizzazione condiziona il comportamento dei fotoni in maniera formalmente simile all'effetto dello spin sul comportamento delle particelle massive. La polarizzazione di per sè solitamente non è un fenomeno quantistico, ma assume un aspetto quantistico solo perchè consideriamo la quantizzazione della luce in fotoni. In questo senso possiamo vedere la polarizzazione come il limite classico dello spin, ma la relazione stretta tra i due vale solo a livello di fotone singolo.

Capitolo 3

Il momento angolare

3.0.1 Il momento angolare in meccanica classica

In meccanica classica la densità di momento angolare totale è definita come

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}) \quad (3.1)$$

dove \vec{p} è la densità di momento lineare.

Per analogia possiamo definire la densità di momento angolare di un'onda elettromagnetica come

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{S} = \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (3.2)$$

con \vec{S} il vettore di Poynting, quindi il momento angolare totale è dato, nel caso di un'onda elettromagnetica, da

$$\vec{J} = \int \vec{j} d^3r = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r. \quad (3.3)$$

Per un sistema di particelle massive il momento angolare totale può essere scomposto in momento angolare estrinseco ed intrinseco

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (3.4)$$

È possibile estendere questa notazione anche alle onde e.m. in particolari condizioni, quando cioè la misura di L ed S viene effettuata lontano dalla sorgente dell'onda.

Momento angolare estrinseco ed intrinseco

Come detto il momento angolare può essere scomposto in momento angolare orbitale (generalmente estrinseco) e di spin (intrinseco). Il primo, detto anche

esterno, può variare o essere annullato da un cambiamento di sistema di riferimento e corrisponde alla rivoluzione della particella attorno al centro di massa, il secondo (intrinseco o interno) non cambia e non si annulla e corrisponde alla rotazione della particella su se stessa.

Per un sistema di particelle si deve anche considerare il momento angolare dovuto al moto del centro di massa.

3.0.2 Il momento angolare in meccanica quantistica

In meccanica quantistica, come per le altre grandezze fisiche, il momento angolare è rappresentato da un operatore autoaggiunto che agisce nello spazio degli stati. Lo stato di una particella o di un sistema fisico in generale invece è definito, ad un dato istante, da una funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$ modulo-quadro integrabile. Questa, e quindi lo stato del sistema, è rappresentata da un vettore di stato in spazio astratto (spazio degli stati), che ha la struttura matematica di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Il risultato di una misura non è altro che il valore medio sullo stato del sistema dell'operatore associato alla grandezza fisica da misurare[26].

L'operatore momento angolare viene definito, a partire dagli operatori posizione \hat{R} e momento \hat{P} , come l'analogo classico:

$$\hat{L} = \hat{R} \times \hat{P} \quad (3.5)$$

e soddisfa la seguente relazione di commutazione:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k \right) \quad (3.6)$$

con la generica componente uguale a

$$L_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} R_j P_k \quad (3.7)$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo (o tensore) di Levi-Civita e vale 1 per le permutazioni pari di (i, j, k) , -1 per quelle dispari e 0 se due indici coincidono.¹ In questo modo viene definito in generale momento angolare \vec{J} un qualunque set di tre

¹le permutazioni pari di (i, j, k) sono (k, i, j) e (j, k, i) , quelle dispari (k, j, i) , (j, i, k) e (i, k, j)

osservabili² J_x, J_y, J_z che soddisfino

$$[J_i, J_j] = i\hbar \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k \right). \quad (3.8)$$

3.1 Momento angolare dei fotoni

Dall'espressione classica (3.2) del momento angolare di un fascio di luce risulta evidente come questo non possa avere una componente lungo l'asse di propagazione, nella realtà però i modi di un laser non sono perfettamente trasversi, ma possono avere piccole componenti lungo z .

In condizioni parassiali una rappresentazione conveniente per un modo laser polarizzato linearmente è, utilizzando la gauge di Lorentz, il potenziale vettore[1, 2, 6, 12]:

$$\vec{A} = \vec{x}u(x, y, z)e^{-ikz} \quad (3.9)$$

dove \vec{x} è il versore nella direzione x e $u(x, y, z)$ o $u(r, \phi, z)$ è la funzione scalare complessa che descrive la distribuzione dell'ampiezza del campo che soddisfa l'equazione d'onda in condizioni parassiali. In questa approssimazione le derivate seconde di E e B e il prodotto delle derivate prime possono essere trascurati e il termine $\frac{\partial u}{\partial z}$ può essere considerato piccolo rispetto a ku .

Nell'ipotesi che la fase dell'onda dipenda solamente dall'angolo ϕ l'ampiezza del campo $u(\vec{r})$ può essere scritta come

$$u(\vec{r}, \phi) = u(\vec{r})e^{i\ell\phi}. \quad (3.10)$$

Poichè il momento angolare si conserva nella propagazione ci poniamo nel piano $z = 0$. La media temporale della parte reale di $\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$, cioè della densità di momento lineare è data da[6]

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^* \right) = \\ &= i\omega \frac{\epsilon_0}{2} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) + \omega k \epsilon_0 |u|^2 \hat{z} + \omega \sigma \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

per un fascio di ampiezza unitaria e polarizzazione qualunque.

Si nota che il termine $u^* \nabla u$ ricorda molto l'espressione quantomeccanica del valore di aspettazione del momento lineare di una funzione d'onda: il

²un osservabile è un operatore autoaggiunto che formi una base completa per lo spazio gli stati

prodotto di questo per il raggio vettore dà il momento angolare orbitale. Le componenti della densità di momento lineare sono:

$$p_r = \epsilon_0 \frac{\omega k r z}{z_R^2 + z^2} |u|^2 \quad (3.12)$$

$$p_\phi = \epsilon_0 \left[\frac{\omega l}{r} |u|^2 - \frac{1}{2} \omega \sigma \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \right] \quad (3.13)$$

$$p_z = \epsilon_0 \omega k |u|^2. \quad (3.14)$$

La componente p_r è legata all'allargamento del fascio durante la propagazione, il primo termine della componente p_ϕ dipende da l , dove $l\hbar$ è il momento angolare per fotone mentre il secondo dà il contributo dello spin: $\sigma = \pm 1$ per polarizzazione circolare levogira e destrogira rispettivamente e $-1 < \sigma < 1$ per polarizzazione ellittica. L'ultima componente è il momento lineare nella direzione di propagazione. Le dimensioni relative delle componenti danno la traiettoria del vettore di Poynting.

La densità di momento angolare orbitale è strettamente legata alla componente azimutale del vettore di Poynting (3.13). Confrontando quest'ultima con l'equazione (3.2), si ottiene come espressione per la componente nella direzione di propagazione z della densità di OAM

$$j_z = \epsilon_0 \left[\omega l |u|^2 - \frac{1}{2} \omega \sigma r \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \right]. \quad (3.15)$$

Se integriamo questa quantità su tutto il fascio e la dividiamo per l'energia totale otteniamo

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\int j_z r dr d\phi}{\int w_z r dr d\phi} = \frac{l \int |u|^2 r dr d\phi}{\omega \int |u|^2 r dr d\phi} - \frac{\sigma}{2\omega} \frac{\int r^2 \frac{\partial |u|^2}{\partial r} d\phi}{\int |u|^2 r dr d\phi} \quad (3.16)$$

che integrando su tutta la sezione trasversale del fascio si semplifica in

$$\frac{J_z}{W} = \frac{l}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}. \quad (3.17)$$

Nel caso in cui si integrasse invece solo su una parte del fascio il primo termine, $\frac{l}{\omega}$ rimane sempre costante, mentre il secondo dipende dal gradiente dell'intensità.

Se l'energia viene irradiata in fotoni di energia $\hbar\omega$ si vede allora che il momento angolare è trasferito in unità di \hbar . In questo modo si giustifica anche l'aver definito $l\hbar$ come contributo di un fotone all' OAM. Il momento angolare totale sarà dato da

$$J_z = (l + \sigma)\hbar. \quad (3.18)$$

Come accennato nella sezione 3.0.2 le grandezze fisiche, nel nostro caso, il momento angolare, sono rappresentate da operatori, e il momento angolare per un fascio di luce risulta[5]

$$\vec{J} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla + \hbar\vec{s} \quad (3.19)$$

dove \vec{s} è la matrice di spin per un campo vettoriale.

Nel formalismo di Dirac invece, il fotone singolo è rappresentato da un vettore che ne descrive la funzione d'onda, in questo caso caratterizzata dall'indice l :

$$|\psi\rangle = |l\rangle = u(r)e^{il\phi}. \quad (3.20)$$

Questa è autostato degli operatori energia e momento angolare totale, e soddisfa inoltre l'equazione agli autovalori

$$\hat{L}_z|l\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} u(r)e^{il\phi} = l\hbar|l\rangle \quad (3.21)$$

cioè è autostato della componente z dell'operatore momento angolare orbitale, con autovalore l .

È possibile anche una trattazione più completa[9] che comprenda operatori di creazione e distruzione e una teoria quantisticamente più rigorosa e formale che qui non verrà esposta.

3.1.1 Momento angolare orbitale e momento angolare di spin

In definitiva il momento angolare totale di una fascio di fotoni può essere considerato come la somma di un momento angolare orbitale, estrinseco e proprietà del fascio, e della somma dei momenti angolari di spin dei singoli fotoni.

Il primo è dovuto alla non perfetta trasversalità dei modi dell'onda che ha come conseguenza la precessione del vettore di Poynting attorno all'asse di propagazione. Il contributo di ogni fotone è $l\hbar$ e se l' OAM totale dell'onda è non nullo (in questo caso si avrebbero fronti d'onda piani) il fronte d'onda assume la forma di un elicoide attorno all'asse z .

Il momento angolare di spin non ha analogo classico, anche se viene associato alla rotazione di una particella su se stessa. Per quanto riguarda i fotoni, lo spin può essere messo in relazione con il fenomeno classico della polarizzazione come esposto nella sezione 2.2.

3.2 I modi di Laguerre-Gauss

La presenza di OAM rende opportuna una trattazione analitica differente dal semplice caso di $l = 0$. L'equazione di d'Alambert in condizioni parassiali per descrivere l'onda diventa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0. \quad (3.22)$$

La soluzione più semplice sono i modi gaussiani, con intensità finita ovunque e decrescenti a zero per $r \rightarrow 0$. Un'altra soluzione sono la classe dei modi di Laguerre-Gauss LG_{pl} . I modi LG definiscono inoltre una base completa per descrivere fasci in condizioni parassiali dotati di OAM. Sono caratterizzati da un indice l che indica il momento angolare del fascio e di conseguenza la struttura dei fronti d'onda, e da un indice p che definisce i nodi radiali, in conseguenza dei quali si osservano $(p + 1)$ anelli concentrici nell'intensità.

Nel caso di $p = 0$ e $l = 0$ il modo coincide con un modo gaussiano.

La generica soluzione a simmetria cilindrica $u_{pl}(r, \phi, z)$ che descrive l'ampiezza del fascio di Laguerre-Gauss è data da[2]

$$u_{pl}(r, \phi, z) = \frac{const.}{(1 + z^2/z_R^2)^{1/2}} \left[\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right]^l L_p^l \left[\frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[\frac{-r^2}{w^2(z)} \right] \\ \exp \left[\frac{-ikr^2z}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp[-il\phi] \exp \left[i(2p + l + 1) \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \right] \quad (3.23)$$

con z_R range di Rayleigh, $w(z) = \sqrt{\frac{2}{k} \frac{z_R^2 + z^2}{z_R}}$ il raggio del fascio, $(2p + |l| + 1) \tan^{-1} \frac{z}{z_R}$ è la fase di Gouy³ e L_p^l il polinomio di Laguerre associato.

Per un modo LG il vettore di Poynting è espresso, in maniera approssimata, da:

$$\vec{S} = C \frac{z_r}{z_r^2 + z^2} \left(\frac{zr}{z_r^2 + z^2} \hat{r} + \frac{l}{kr\phi} \hat{\phi} + \hat{z} \right). \quad (3.24)$$

³cioè uno spostamento di fase che avviene nella propagazione di un fascio gaussiano

Considerando sia momento di spin che OAM, la velocità azimutale di rotazione del vettore di Poynting si può esprimere attraverso

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{p} \frac{\partial p_\theta}{\partial p_z} = \frac{l}{kr^2} - \frac{\sigma}{2kr} \frac{1}{|u|^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} \\
&= \frac{l}{kr^2} - \frac{\sigma |l|}{kr^2} + \frac{2\sigma}{kw^2(z)} + \frac{4\sigma}{kw^2} \frac{L_{p-1}^{|l+1|}(2r^2/w^2(z))}{L_p^{|l|}(2r^2/w^2(z))} \\
&= \frac{l}{kr^2} \left(1 - \frac{\sigma |l|}{l} \right) + \frac{2\sigma}{kw^2} \quad \text{per un modo LG con } l \neq 0 \text{ e } p = 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Il risultato[6] è un'elica con passo $z_p = 2\pi kr^2/l$ e intensità per un modo LG (sempre nel caso $p = 0$ e $l \neq 0$) data da:

$$I(r, \phi) = |u_{0l}|^2 = \frac{2}{2\pi l!} \frac{1}{w^2} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w} \right)^{2|l|} \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2} \right) \tag{3.26}$$

ovvero un anello di intensità nulla al centro, a causa dell'interferenza distruttiva dei fronti d'onda a diversa fase, e massima a $r_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} w \sqrt{l}$ dove ha valore $I(r_{max}) = \frac{2}{\pi w^2 l!} l^l e^{-l}$. Per grandi l si può approssimare l'andamento dell'intensità con $l^{-1/2}$.

Capitolo 4

Vortici ottici

I vortici ottici (OVs) sono singolarità di fase presenti in fasci di luce dotati di OAM. Il fronte d'onda di questo fasci possiede la struttura elicoidale trattata precedentemente. Questi hanno notevoli applicazioni[5] in svariati campi scientifici dall'ingegneria alle nanotecnologie, dall'astronomia e astrofisica, alla cosmologia. Sono già usati come microattuatori, pinze ottiche, e altre applicazioni simili e potrebbero essere studiati per ottenere diverse informazioni sui processi di produzione del fascio studiato o sui fenomeni che hanno trasferito OAM a fasci che ne erano privi. Nei prossimi capitoli verrà trattato il loro possibile utilizzo nella coronografia.

4.1 Carica topologica e descrizione di un vortice

L'esistenza di singolarità nel fronte d'onda implica che l'ampiezza di un'onda elettromagnetica lì si annulli, cioè sia la parte reale che la parte immaginaria dell'ampiezza complessa siano uguali a zero, la fase diventa quindi indeterminata[4].

Teoricamente e sperimentalmente è provato che OVs sullo stesso fronte d'onda si comportano come particelle cariche: si attraggono se hanno la stessa carica e si respingono altrimenti, possono anche annichilire per collisione.

Le dislocazioni (così vengono anche chiamate le singolarità di fase nei fronti d'onda) si possono brevemente suddividere in:

- “infinitely extended edge dislocations” o “edge dislocations”: una parte del fronte d'onda è spostata di mezza lunghezza d'onda lungo la direzione di propagazione e la dislocazione è la linea di taglio tra le due fasi

- “screw dislocations”: in questo caso, di nostro interesse, la singolarità è un punto nel fronte d’onda, su ogni circuito chiuso attorno al quale la fase cambia di un multiplo intero di 2π
- “limited edge dislocations”: sono un ibrido tra i due tipi precedenti in cui il taglio del fronte d’onda si estende solo in una certa direzione.

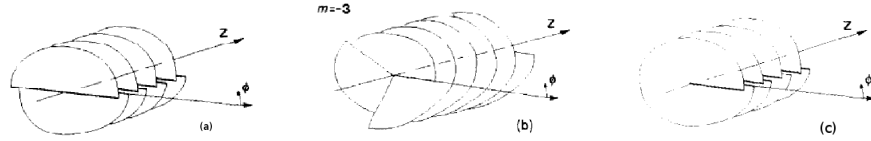


Figura 4.1: Dislocazioni: (a) infinitely edge dislocation, (b) screw dislocation, (c) limited edge dislocation.

Qui verranno trattate solamente le dislocazioni del secondo tipo. Introduciamo il concetto di carica topologica di un vortice come[7] la circuitazione del gradiente della fase attorno alla singolarità:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_C \nabla \chi \cdot d\vec{s} \quad (4.1)$$

se scriviamo l’ampiezza del campo come

$$u(\vec{r}) = |u(\vec{r})| \exp(i\chi(\vec{r})) . \quad (4.2)$$

Si dimostra che $Q = l$ per cui la carica topologica di un vortice è una misura del momento angolare orbitale del fascio.

Cariche topologiche maggiori di ± 1 sono instabili a piccole perturbazioni e possono decadere in dislocazioni unitarie vicine con conservazione del segno. Il segno viene invertito per riflessione.

La più semplice espressione per un’onda che trasporti una dislocazione a carica unitaria è[4]

$$E(r, z, \phi) = r \exp(\pm i\phi - ikz) \quad (4.3)$$

che costituisce un’approssimazione accettabile nelle vicinanze della singolarità divergendo per r crescenti. Riprendendo alcuni concetti esposti in precedenza, il fronte d’onda assume la forma di un elicoide definito da

$$\pm\phi - kz = cost . \quad (4.4)$$

Un'onda reale deve avere ampiezza finita e condizione al contorno $\lim_{r \rightarrow \infty} = 0$, per cui si preferisce scegliere come onda per ospitare un vortice un fascio gaussiano, di conseguenza l'espressione diventa, per una dislocazione di carica m ,

$$E_m(r, \phi, z) = E_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{|m|} \left(\frac{kr_0^2/2}{\sqrt{z^2 + (kr_0^2/2)^2}} \right)^{|m+1|} \exp \left(-r^2 \frac{k^2 r_0^2/4}{z^2 + (kr_0^2/2)^2} \right) \exp \left\{ i \left[(|m| + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{kr_0^2}{2z} \right) - \frac{kr^2}{2z + k^2 r_0^4/2z - m\phi - kz} \right] \right\} \quad (4.5)$$

con la dipendenza trasversale della fase data da

$$\Phi(r, \phi) = -m\phi - \frac{kr^2}{R(z)} \quad (4.6)$$

dove $R(z) = 2(z + k^2 r_0^4/4z)$ è il raggio di curvatura del fronte d'onda.

Esaminando l'interferenza del fascio dotato di momento con un fascio sferico coerente con raggio di curvatura R_0 nello spazio di interferenza, si possono generalmente osservare $|m|$ frange di interferenza¹ che si dipartono dal centro della figura date da:

$$\cos \left(-m\phi - \frac{kr^2}{2R(z)} + \frac{kr^2}{2R_0} \right) = 1 \quad (4.7)$$

o equivalentemente

$$-m\phi + kr^2 \frac{R(z) - R_0}{2R(z)R_0} = 2\pi l \text{ con } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

La rotazione oraria delle frange corrisponde al segno positivo della carica della dislocazione nel caso di interferenza con onde piane ($R_0 = \infty$) e viceversa. Se i raggi di curvatura sono uguali ($R(z) = R_0$) le frange non sono curve e il disegno di interferenza è simile ad una stella con un numero di raggi pari al modulo della carica topologica (Fig. 4.2).

È possibile rilevare la presenza di una singolarità anche facendo interferenza fuori asse (Fig. 4.3), in modo che gli assi di propagazione siano inclinati uno

¹per un'interpretazione di queste figure di interferenza si veda la sezione 4.8

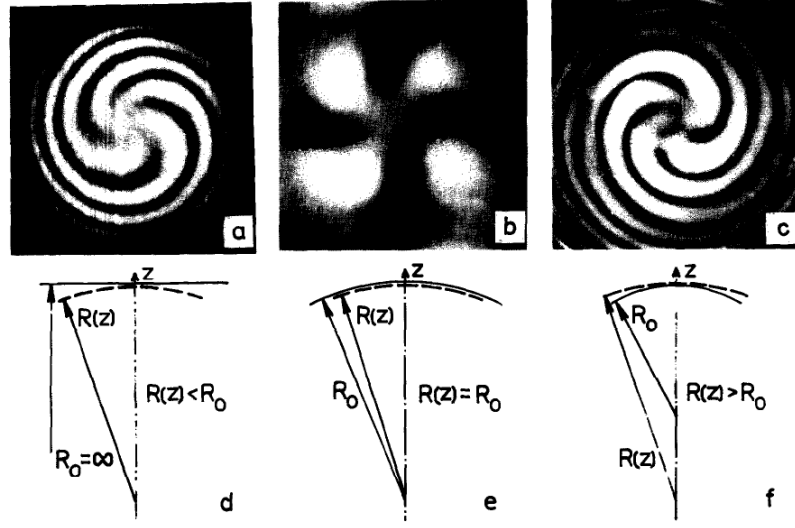


Figura 4.2: Figure di interferenza tra un'onda dotata di una dislocazione con carica topologica $m = 4$ e un fascio di riferimento. (a) interferenza con un fascio di onde piane, (b) i due fasci hanno la stessa curvatura, (c) il fascio di riferimento ha onde sferiche con raggio di curvatura minore[4].

rispetto all'altro di un angolo θ : la posizione dei massimi è allora determinata dall'equazione

$$\cos \left(-m\phi - \frac{kr^2}{2Rz} - (|m| + 1) \arctan \frac{kr_0^2}{2z} + kr \cos \phi \sin \theta - 2kz \sin^2 \frac{\theta}{2} + (|m| + 1) \frac{\pi}{2} \right) = 1. \quad (4.9)$$

Quest'ultima equazione può essere utilizzata per creare un reticolo assumendo $z = cost$: al centro della figura $|m|$ nuove frange sono create o svaniscono per creare il caratteristico diagramma a forchetta, che verrà utilizzato per generare i vortici ottici.

4.2 Produzione dei vortici ottici

La produzione di fasci dotati di OAM può essere ottenuta agendo di su un fascio laser con i cosiddetti Phase Modifying Devices (PMD), ovvero lenti cilindriche, Spiral Phase Plates (SPP) e Fork-Holograms (Fig. 4.4). Nel primo caso è necessario avere un fascio di Hermite-Gauss che incide su un sistema

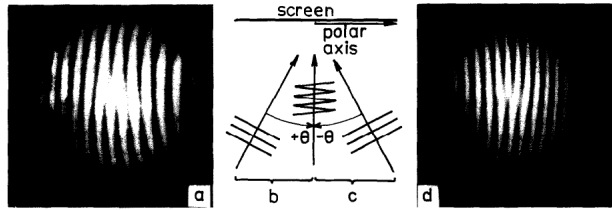


Figura 4.3: Figure di interferenza tra un'onda con OAM e un'onda piana fuori asse[4].

di lenti cilindriche. Questa tecnica non verrà trattata. Gli altri due metodi utilizzano laser gaussiani. Le SPP sono lenti con la superficie modellata a elicoide in modo da determinare un avanzamento progressivo della fase lungo il fronte d'onda attorno alla singolarità, mentre nel secondo caso degli ologrammi viene utilizzata una particolare tecnica basata sull'interferenza.

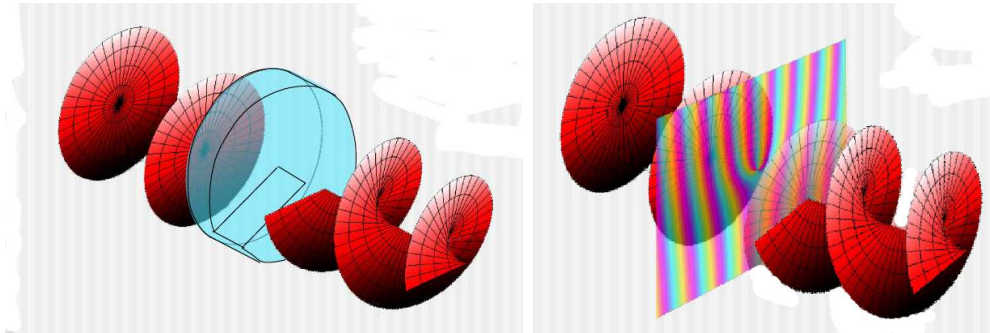


Figura 4.4: Un fascio di onde piane acquista OAM attraversando una SPP o un ologramma[31].

4.2.1 Maschere di fase

Con il termine maschera di fase si intende un elemento ottico in grado di trasmettere un fascio con la superfici a ugual fase (fronti d'onda) modificati in modo controllato.

Solitamente una maschera di fase è costituita da una lente cilindrica o da un ologramma. Nel primo caso si tratta di lenti cilindriche con superficie elicoidale (Fig. 4.5) tale da creare uno sfasamento di $\Delta\phi = m2\pi$ nel fronte d'onda attorno al centro, formando così un vortice in corrispondenza dell'oggetto allineato con l'asse ottico.

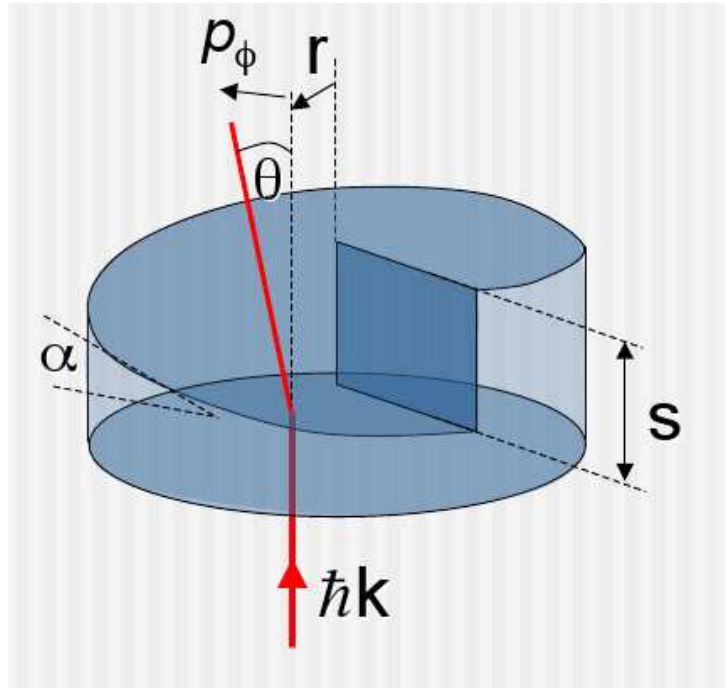


Figura 4.5: Schema di una SPP[31].

Un ologramma sfrutta invece una tecnica che consiste nell'imprimere su un adeguato supporto la figura di interferenza generata da un fascio dotato di OAM e quindi con vortice ottico e un fascio di onde sprovviste di OAM. Illuminato da un fascio opportuno questo ricrea il vortice permettendo l'oscuramento.

Questi due metodi producono risultati diversi quando si utilizza un fascio non monocromatico. La SPP impone a diverse frequenze un diverso momento angolare (come si deriva dalla formula $l = \Delta n s / \lambda$, dove Δn è la differenza di indice di rifrazione tra il materiale della SPP e l'esterno s è l'altezza del gradino della spirale[21]) (Fig. 4.5), producendo OV's coassiali ma con raggi diversi. Gli ologrammi, invece, disperdono la luce producendo OV's in posizioni diverse a seconda della frequenza, ma tutti con lo stesso valore di OAM per un ordine di diffrazione prefissato. Il vortice ottico prodotto da questi ultimi non ha più la forma di un anello, ma sarà una sovrapposizione di figure ad anello caratterizzate da una linea scura centrale dovuta alla parziale sovrapposizione delle diverse singolarità ottiche.

Le tecnologie attuali permettono di creare SPP a gradini e ologrammi con momento angolare non superiore a qualche decina, ma sono in atto numerosi studi per migliorare notevolmente questi limiti.

Ologrammi

Per ologramma si intende la figura di interferenza prodotta da due raggi laser opportunamente posizionati.

Nelle applicazioni “commerciali” uno dei due laser illumina un oggetto, e la luce diffusa viene fatta interferire con l’altro raggio e la figura di interferenza stampata su una lastra trasparente. Illuminando successivamente questa con un laser è possibile vedere l’immagine tridimensionale dell’oggetto iniziale. Nel nostro caso l’ologramma è prodotto a partire dalla formula (4.9) ed è la proiezione in due dimensioni della figura di interferenza creata da un fascio dotato di OAM e un fascio di onde piane (Fig. 4.6). In questo modo una volta focalizzato un fascio di luce sull’ologramma, questo imprime un momento angolare tale da ricreare il vortice (Fig. 4.4).

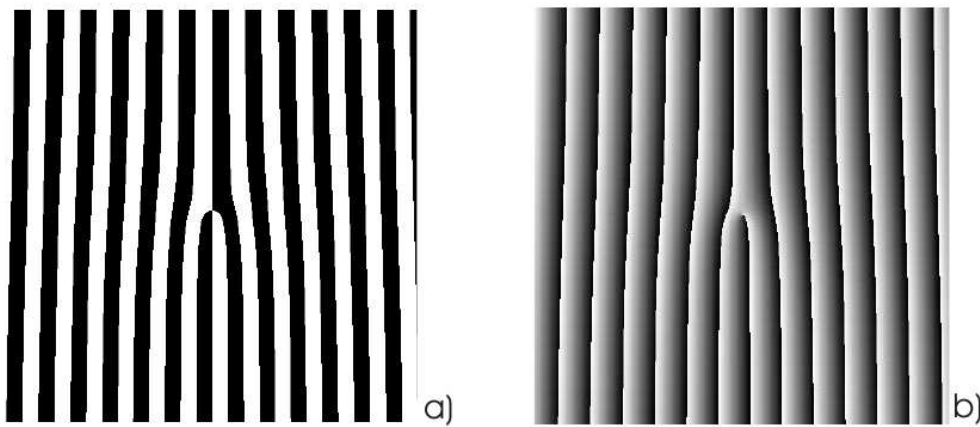


Figura 4.6: Ologramma binaria generato al computer (a) e blazed (b) [31].

4.3 Vortici ottici e momento angolare

Per capire la forma del fronte d'onda rispetto all'OAM imposto ricordiamo la formula che lo definisce:

$$\Phi = m\phi + kz = cost \quad (4.10)$$

dove Φ è la fase, m il momento angolare orbitale, ϕ la coordinata angolare, $k = 2\pi/\lambda$ e z è la coordinata lungo l'asse di propagazione. La variazione della fase risulta

$$d\Phi = md\phi + kdz \quad (4.11)$$

Se fissiamo ad esempio la coordinata angolare, $d\phi = 0$, avremo che per qualunque momento imposto la variazione della fase Φ in una lunghezza d'onda vale

$$d\Phi = 0 + kdz = \frac{2\pi}{\lambda}\lambda = 2\pi. \quad (4.12)$$

Consideriamo ora la variazione della fase in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione ($dz = 0$):

$$d\Phi = md\phi = m2\pi \quad (4.13)$$

cioè in un giro la fase ritrova il valore 2π per m volte.

Infine, troviamo il luogo dei punti ad ugual fase (ovvero il fronte d'onda):

$$d\Phi = 0 = md\phi + kdz \implies dz = \frac{md\phi}{k} = \frac{m2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = m\lambda \quad (4.14)$$

per cui l'elica del fronte d'onda per compiere un giro completo impiega $m\lambda$ di spostamento in z , che equivale a dire che in una lunghezza d'onda l'elica compie un angolo di

$$d\phi = \frac{kdz}{m} = \frac{2\pi}{m} \quad (4.15)$$

che corrisponde a $1/m$ giri.

L'elica corrispondente ad una certa fase impiega quindi $m\lambda$ in z per fare un giro completo, da cui si vede che maggiore è l'OAM imposto, tanto meno attorcigliato è il fronte d'onda: il vettore di Poynting, ad esso perpendicolare, compie infatti una spirale tanto più attorcigliata quanto maggiore è m .

Per capire le figure di interferenza presentate nella sezione 4.1 è necessario però notare che sebbene il fronte d'onda legato ad una fase è unico, sono presenti, inseriti tra una "falda" e l'altra dello stesso fronte, $m - 1$ altri fronti

la cui fase è multiplo intero di quella considerata, capaci quindi di creare interferenza costruttiva per uno stesso valore di Φ . La spiegazione consiste nel modo in cui vengono trasformati i fronti d'onda piani: ogni fronte d'onda viene deformato in modo da diventare un'elica lunga $m\lambda$, in questa distanza su z compie un giro, cioè $d\phi_{m\lambda} = 2\pi$. I fronti piani originari distavano però λ , quindi quando il primo fronte ha coperto un angolo di $\phi = 2\pi/\lambda$, ovvero $1/m$ di giro, il secondo fronte d'onda inizia la sua elica, e così via fino all' m -esimo fronte. L' $(m+1)$ -esimo fronte inizia invece dove finisce il primo, l' $(m+2)$ -esimo dove finisce il secondo, etc., rendendo così continue le eliche. In questo modo si formano m rami o bracci nella figura di interferenza con un fascio di onde piane, senza che siano presenti fronti d'onda distinti, ma con la stessa fase.

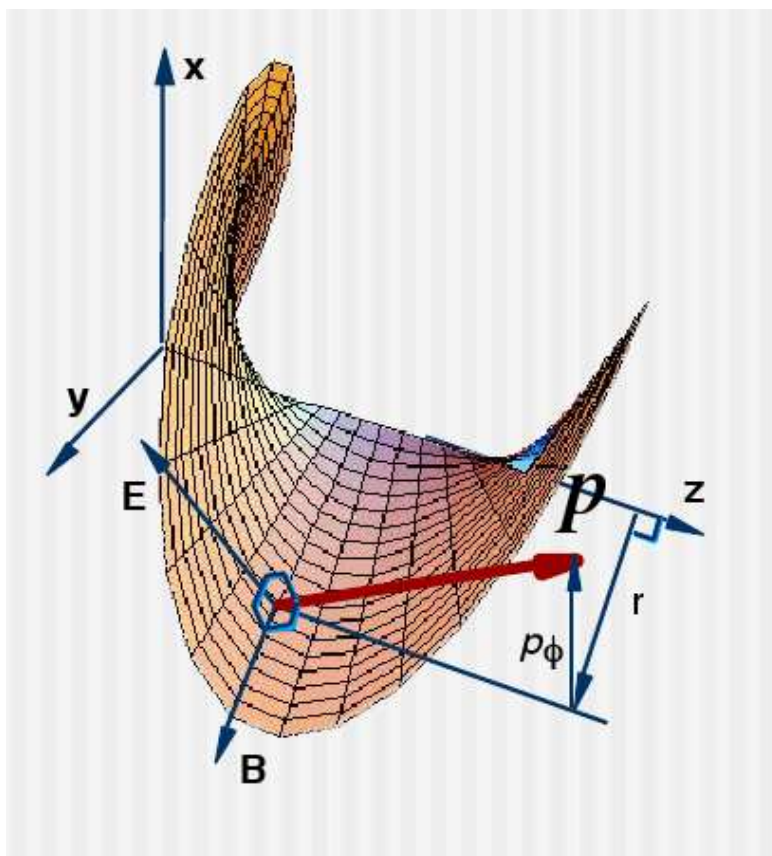


Figura 4.7: Struttura di un'elica del fronte d'onda[31]. Si possono vedere i vettori corrispondenti ai campi elettrico e magnetico e il vettore di Poynting.

Nella sezione 3.2 si è accennato alla dipendenza della figura di intensità dal momento angolare: se il fascio privo di OAM era un modo gaussiano il risultato è una “ciambella” il cui picco di intensità si trova ad un raggio $r_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}w\sqrt{l}$. Come si può vedere, se m cresce il passo della spirale descritta dal vettore di Poynting diminuisce e il raggio della ciambella aumenta (Fig. 4.8).

Nel caso di fasci in entrata non gaussiani la figura avrà un altro andamento, comunque sempre legato alla presenza del vortice.

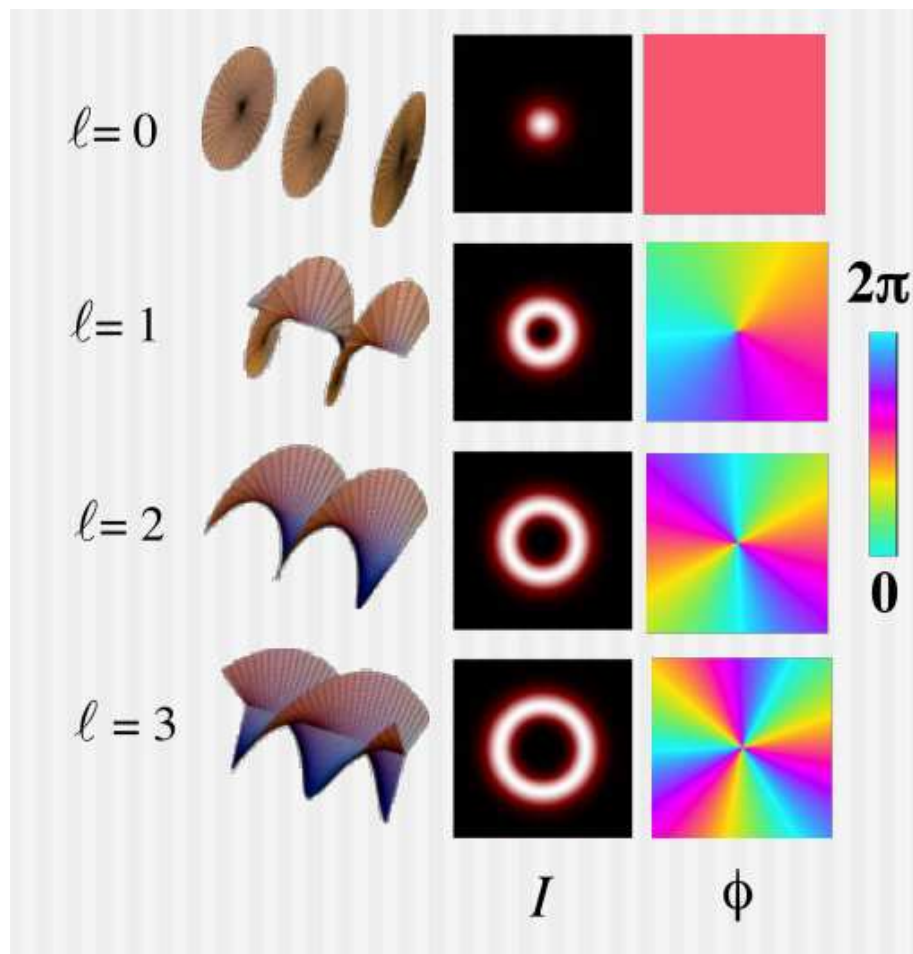


Figura 4.8: Struttura del fronte d’onda a seconda del momento m imposto. A fianco si vede la dipendenza dell’intensità e la variazione della fase su di un piano normale alla direzione di propagazione[31].

Capitolo 5

Coronografia

L'osservazione diretta di sorgenti deboli (stelle secondarie o pianeti) attorno a sorgenti astrofisiche molto luminose (stelle molto brillanti in sistemi doppi o multipli o nuclei galattici attivi) è da sempre un compito molto difficile a causa del grande rapporto tra i flussi. Ad esempio un pianeta extrasolare di tipo terrestre tipicamente è $6 \cdot 10^9$ volte più debole della stella che lo ospita nel visibile e $7 \cdot 10^6$ nell'infrarosso[15]. Il contrasto tra dischi di detriti già noti attorno a stelle di sequenza principale è dell'ordine delle migliaia nel visibile e le strutture circumnucleari degli AGN (tori oscuranti, strutture indotte dai jet, ...) possono essere 100 volte meno luminose del nucleo centrale nelle lunghezze d'onda del visibile e vicino infrarosso. Lo studio di tali oggetti richiede quindi strumenti dedicati come i coronografi.

Il primo coronografo fu concepito da Lyot (1939) per sopprimere la diffrazione strumentale della luce utilizzando una sequenza di ostruzioni con lo scopo specifico di osservare la corona solare[23]. Il termine coronografo è poi passato ad indicare qualunque sistema studiato per eliminare la luce diffratta e diffusa in un telescopio o un altro strumento ottico, e più in generale per raggiungere un grande contrasto con un telescopio a singola apertura. Nella pratica si tratta di dispositivi utilizzati per sopprimere il rumore associato alla luce di una stella scartandolo dall'area di interesse al piano focale del telescopio.

I coronografi attuali utilizzano generalmente pure maschere di ampiezza o di fase. Nel primo caso si tratta di semplici ostruzioni singole o multiple che oscurano parte del fascio in diversi punti del sistema ottico, mentre nel secondo caso rientrano elementi trasmissivi che modificano la fase di parte del fascio in modo da creare interferenze (nulling interferometry) o vortici (optical vortex coronagraph) che permettano di oscurare la sorgente più brillante (nel caso di osservazioni astronomiche, o di eliminare rumore dovuto

allo scattering se si tratta di esperimenti in laboratorio). In questo modo è possibile oscurare una parte della sorgente lasciando più o meno intatta la luce proveniente dall'oggetto studiato.

5.1 Coronografia e vortici ottici

L'utilizzo di OV in coronografia è abbastanza recente e tuttora in via di sviluppo. Una trattazione approfondita, con studi analitici, numerici e sperimentali, è stata svolta da Mawet et al.[15], in aggiunta alla proposta di una maschera di fase ad anelli concentrici (Fig. 5.1) di dimensioni inferiori alla lunghezza d'onda e con momento angolare orbitale imposto $m = 2$ in modo da conservare le caratteristiche acromatiche dello strumento.

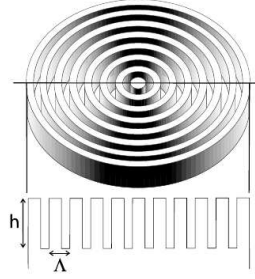


Figura 5.1: Maschera di fase ad anelli concentrici.

Il loro studio analitico dell'attenuazione in funzione dell'OAM imposto sostiene la migliore resa di maschere con momento imposto pari, in particolare con $m = 2$.

L'equazione che ne risulta mette in evidenza la dipendenza dell'attenuazione dal momento angolare orbitale imposto l :

$$A_{pup}(\rho, \psi, l_p) = -i^{-l_p} \frac{2e^{il_p\psi}}{R_{tel}} \begin{cases} (2\pi\rho)^{l_p} (2\pi R_{tel})^{-l_p-1} \frac{\Gamma(1+l_p/2)}{\Gamma(l_p+1)\Gamma(1-l_p/2)} {}_2F_1\left(\frac{l_p+1}{2}, \frac{l_p}{2}; l_p+1; \frac{\rho^2}{R_{tel}^2}\right), & 0 < \rho < R_{tel} \\ (2\pi\rho)^{-2} (2\pi R_{tel}) \frac{\Gamma(1+l_p/2)}{\Gamma(2)\Gamma(l_p/2)} {}_2F_1\left(\frac{l_p+1}{2}, \frac{2-l_p}{2}; 2; \frac{\rho^2}{R_{tel}^2}\right) & \rho > R_{tel} \end{cases} \quad (5.1)$$

L'attenuazione migliore, $A_{pup}(\rho, \psi, l_p) = 0$, si ha per $\rho < R_{tel}$ e valori pari e non nulli del momento, $l_p = 2, 4, 6, \dots$. Mawet affronta anche l'effetto della polarizzazione attraverso le matrici di Jones.

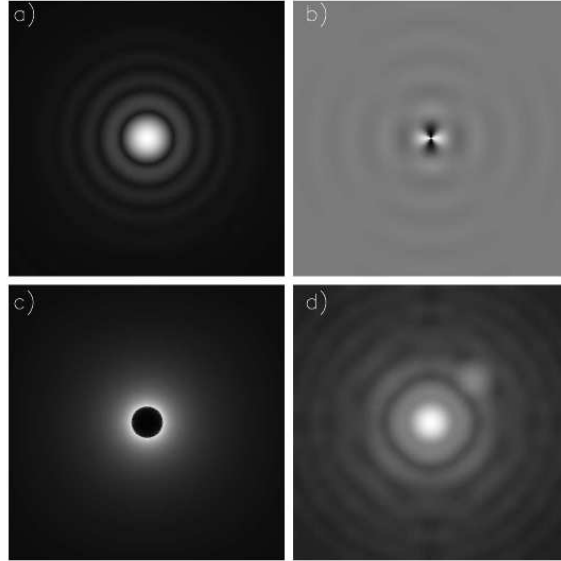


Figura 5.2: Simulazioni numeriche del coronografo di Mawet:(a) osservazione con un telescopio ideale e senza maschere, (b) ampiezza complessa della luce della stella dopo aver inserito la maschera, (c) oscuramento ottenuto nel piano della pupilla, (d) immagine risultante con il secondo oggetto visibile.

Un altro studio è stato proposto da Foo et al.[16] per un coronografo costituito da una maschera di fase elicoidale con momento imposto $m = 2$. Il coronografo studiato da Foo è costituito da tre lenti (Fig. 5.3) pensate come trasformatori di Fourier, senza aberrazioni, diffusione della luce e con trasmissione del 100%[16]. Si suppone che le due sorgenti siano mutualmente incoerenti e che tutte le lenti abbiano la stessa lunghezza focale f . Viene inoltre aggiunto uno stop di Lyot (una maschera opaca ai bordi e trasparente al centro) sul piano della terza lente.

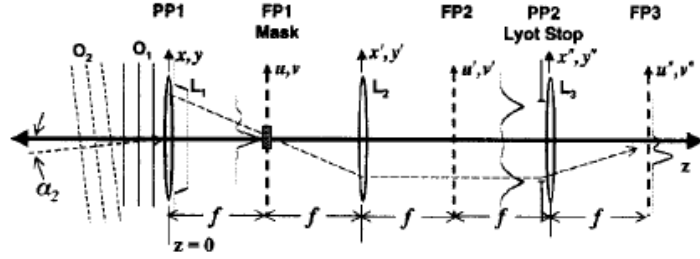


Figura 5.3: Coronografo studiato da Foo et al..

Analiticamente vengono calcolate le espressioni per il campo dell'onda ad ogni piano di interesse dello strumento, ottenendo come risultato

$$|U_1(u', v')| = \begin{cases} A_1 R_{EP}^2 / \rho'^2, & \rho' > R_{EP} \\ 0, & \rho' < R_{EP} \end{cases} \quad (5.2)$$

ovvero l'eliminazione della stella per $R_{Lyot} > R_{EP}$.

I calcoli numerici effettuati per $m = 0, 1, 2$ portano a concludere che il risultato migliore si ottenga per $m = 2$.

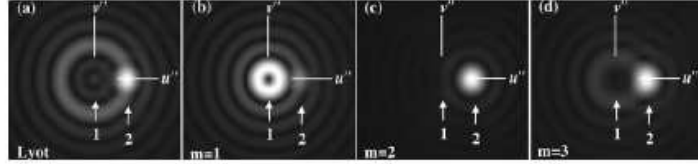


Figura 5.4: Risultati ottenuti da Foo: (a) coronografo di Lyot, (b), (c), (d) coronografo a vortice per $m = 1, 2, 3$.

Lee et al.[20] hanno testato sperimentalmente in laboratorio un coronografo a vortici con contrasto teorico del 100% basato su una maschera di fase a 16 scalini (Fig. 5.5) con carica topologica $m = 2$. Lo strumento, costituito da alcune lenti e ostruzioni prima e dopo la SSP ha raggiunto un contrasto del 95% eliminando una sorgente a luce verde in asse e permettendo la rilevazione della sorgente rossa lievemente fuori asse.

In entrambi i lavori è possibile verificare la netta superiorità degli strumenti che utilizzano una maschera di fase rispetto al classico stop di Lyot rimuovendo la maschera ed utilizzando solamente le ostruzioni (Fig. 5.6).

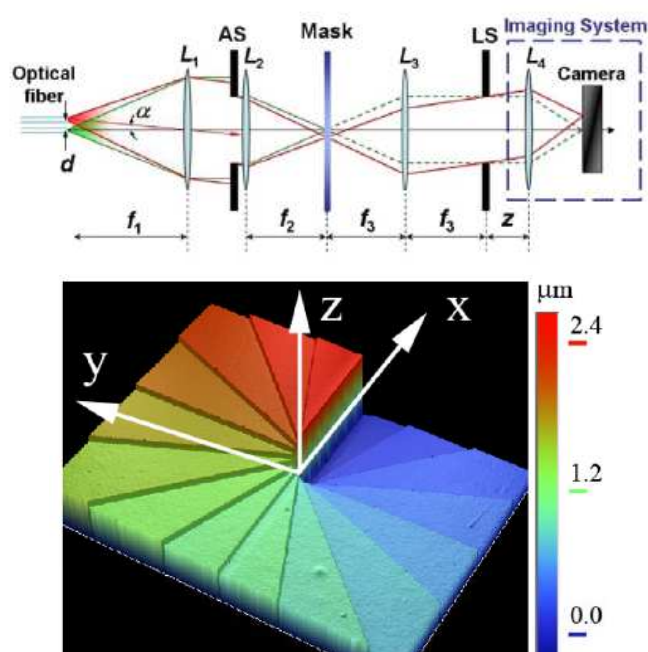


Figura 5.5: Il coronografo di Lee e la maschera..

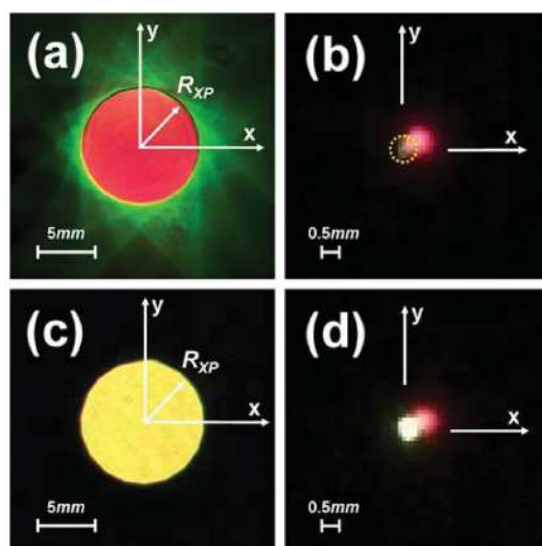


Figura 5.6: In alto, con la maschera: (a) pupilla d'uscita, (b) vista delle fibre ottiche all'ingresso dello strumento (il cerchio tratteggiato indica il verde che non si vede). In basso, senza la maschera: (c) pupilla d'uscita e (d) fibre ottiche in entrata.

Capitolo 6

Simulazioni al computer

In questa sezione analizziamo numericamente quale sia il momento angolare migliore per la costruzione di una maschera di fase da utilizzare in un coronografo. Il criterio è quello di ottenere un contrasto elevato ed eliminare la luce proveniente dall'oggetto più brillante così da poter osservare la sorgente più debole.

Utilizzando il linguaggio IDL è stato simulato un sistema ottico in grado di trasferire un momento angolare orbitale arbitrario a un fascio determinato dall'immagine posta all'inizio (PSF, fascio gaussiano, ...) con lo scopo di determinare il migliore OAM da utilizzare per la costruzione di un coronografo a vortici ottici.

Il software crea una matrice con la funzione di immagine in entrata, questa viene poi trasformata in una *point spread function* come se si trattasse di uno strumento al telescopio, quindi il programma crea la matrice corrispondente all'ologramma e la moltiplica per il disco di Airy per poi farne la trasformata di Fourier e ottenere così l'immagine finale. L'immagine in uscita corrispondente a $m = 0$ è ovviamente l'antitrasformata di Fourier della trasformata di una fenditura, e si possono infatti notare gli effetti (visibili maggiormente sui bordi della fenditura) della ricostruzione di una discontinuità (la fenditura corrisponde ad una funzione a scalino) ricostruita con un numero finito di armoniche (Fig. 6.1).

Per tutti gli OAM imposti è stato tracciato il profilo di intensità con un altro programma IDL sono stati trovati i limiti spaziali della fenditura. A partire da questi le immagini corrispondenti agli OAM non nulli sono state confrontate rapportando la quantità di luce all'esterno dei limiti e quella all'interno per trovare l'OAM più efficiente.

I risultati sono affetti da errori di approssimazione a causa delle dimensioni

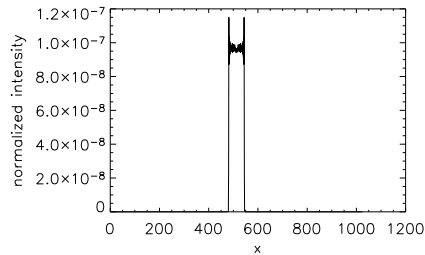


Figura 6.1: Profilo all'ordine $m = 0$, corrisponde all'immagine della fenditura ricostruita con un numero finito di armoniche.

ridotte delle matrici utilizzate imposte dalla limitata capacità di calcolo degli elaboratori. Prove ripetute su elaboratori diversi hanno mostrato qualche piccola differenza di approssimazione che non ha però modificato il risultato finale.

Le simulazioni sono state effettuate con una matrice di input di dimensioni 1025×1025 per $0 < l < 10$, $0 < l < 20$, $0 < l < 50$ e $0 < l < 100$. Le dimensioni della matrice sono volutamente dispari per eliminare problemi di disallineamento in calcoli successivi¹.

Successivamente, per risolvere pesanti limitazioni nel calcolo corretto delle aree dei profili risultanti le dimensioni della matrice di input, sono state aumentate a 2049×2049 con $0 < l < 10$, $0 < l < 20$, $0 < l < 50$ e $0 < l < 100$. In seguito sono state effettuate simulazioni con valori ancora diversi delle dimensioni per testare la variabilità dei risultati rispetto alle matrici di input. Ciò che si è ottenuto suggerisce che le differenze siano dovute all'andamento dei profili delle aree, che in alcuni casi possono essere sottostimate a causa delle dimensioni limitate.

Il risultati sono riportati in tabella 6.1.

Per scelta migliore si intende il minor rapporto tra luce nella pupilla e luce rimasta all'esterno ottenuto (per un oggetto allineato all'asse ottico). Questo rapporto è fondamentale per definire il massimo contrasto ottenibile dal coronografo.

I risultati sono coerenti con gli studi teorici secondo i quali valori pari di OAM generano vortici con profili di luminosità in cui la sorgente allineata all'asse ottico viene eliminata dalla regione centrale. Un solo risultato non si allinea e pone qualche dubbio su un possibile errore dovuto a effetti numerici durante il calcolo.

Non è stato possibile effettuare simulazioni con matrici di dimensioni mag-

¹effettuare calcoli con matrici a dimensioni pari implica non avere un pixel centrale di riferimento, di conseguenza l'effetto osservato è analogo al disallineamento delle ottiche.

Matrix dimensions	Range of m	Best m
257×257	0-10	10
	0-20	10
	0-50	10
	0-100	10
513×513	0-10	9
	0-20	18
	0-50	18
	0-100	62
705×705	0-10	9
	0-20	18
	0-50	18
	0-100	86
1025×1025	0-10	2
	0-20	18
	0-50	18
	0-100	100
1921×1921	0-10	9
	0-20	18
	0-50	18
	0-100	42
2049×2049	0-10	9
	0-20	18
	0-50	42
	0-100	74

Tabella 6.1: Risultati delle simulazioni: sostanzialmente avvallano lo studio analitico, con l'eccezione di un risultato dispari. Questo potrebbe essere dovuto alle approssimazioni nei calcoli delle trasformate di Fourier. Le differenze negli altri risultati sono probabilmente dovute alle dimensioni delle matrici considerate: alcuni profili risultano così troncati causando una sottostima del valore delle aree laterali.

giori a causa della potenza di calcolo e della quantità di memoria richieste.²



Figura 6.2: Immagine del disco di Airy e ingrandimento.

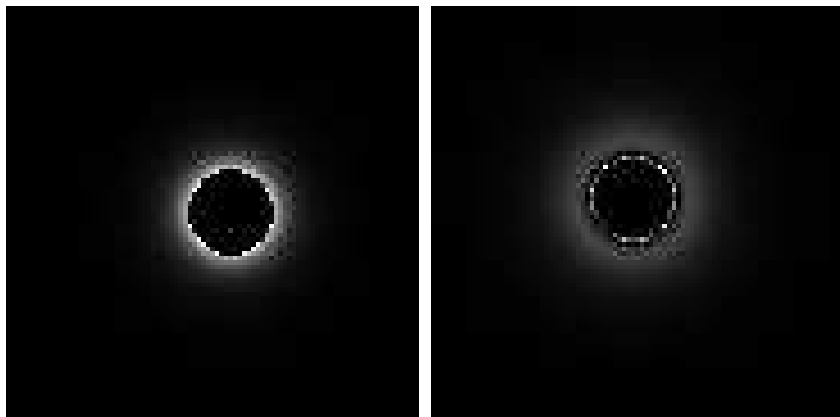


Figura 6.3: Immagini della pupilla d'uscita per $m = 2, 3$ ingrandite: si può notare l'anello di luce della figura d'intensità attorno al cerchio ad intensità nulla corrispondente al vortice.

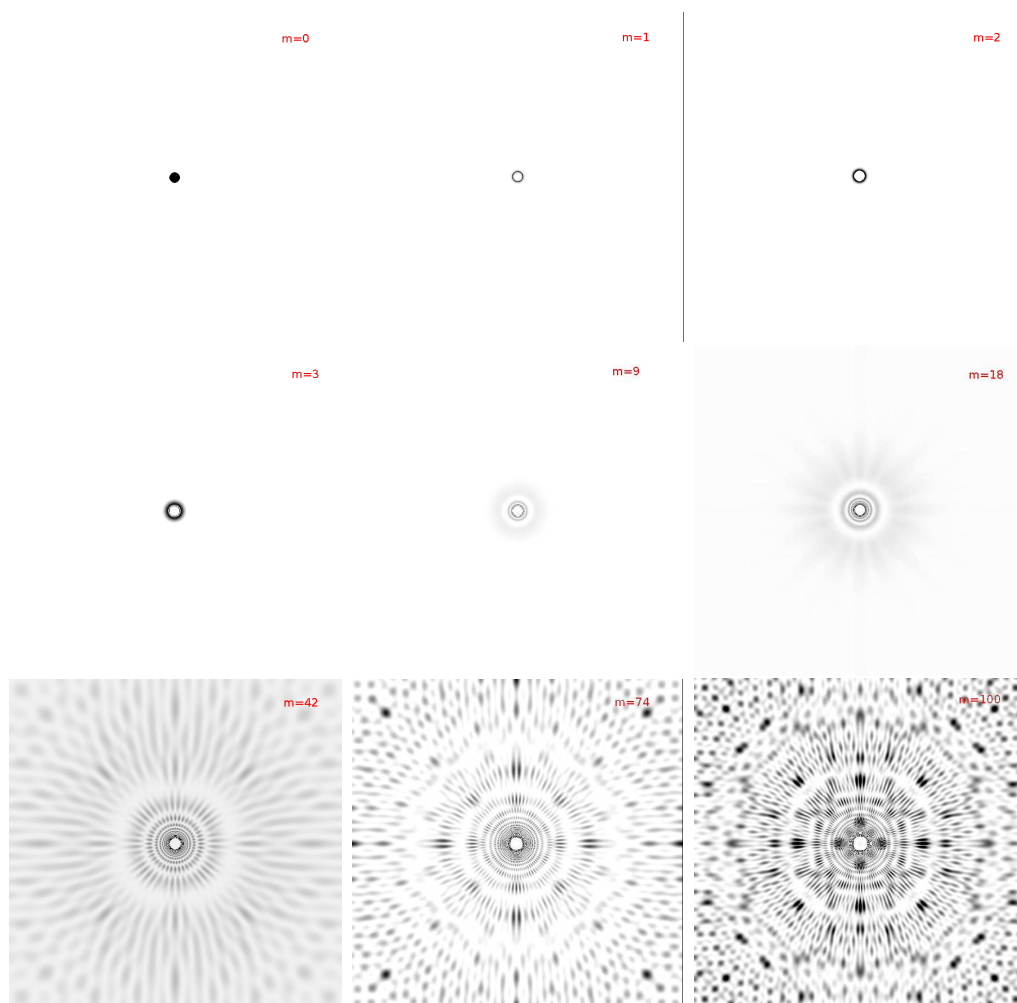
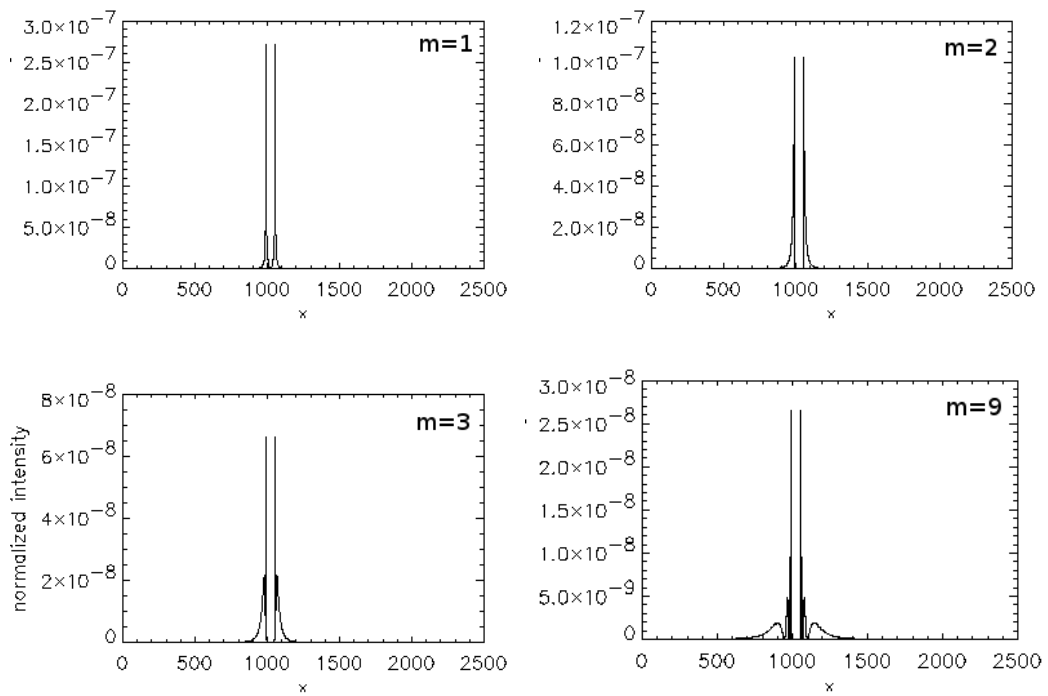


Figura 6.4: Immagini della figura di intensità per gli OAM risultati migliori, ogni figura è contrassegnata dal valore di OAM corrispondente. Nelle tre immagini di pupilla d'uscita in basso sono riconoscibili strutture luminose altamente simmetriche e caratteristiche dell'OAM posseduto, dovute al calcolo che simula le ottiche con trasformate di Fourier.



²La macchina utilizzata per i calcoli definitivi è un doppio processore Intel Pentium 4 540, 3.20 GHz 1 MB cache (sock 775) con Hyper Threading e bus da 800 MHz

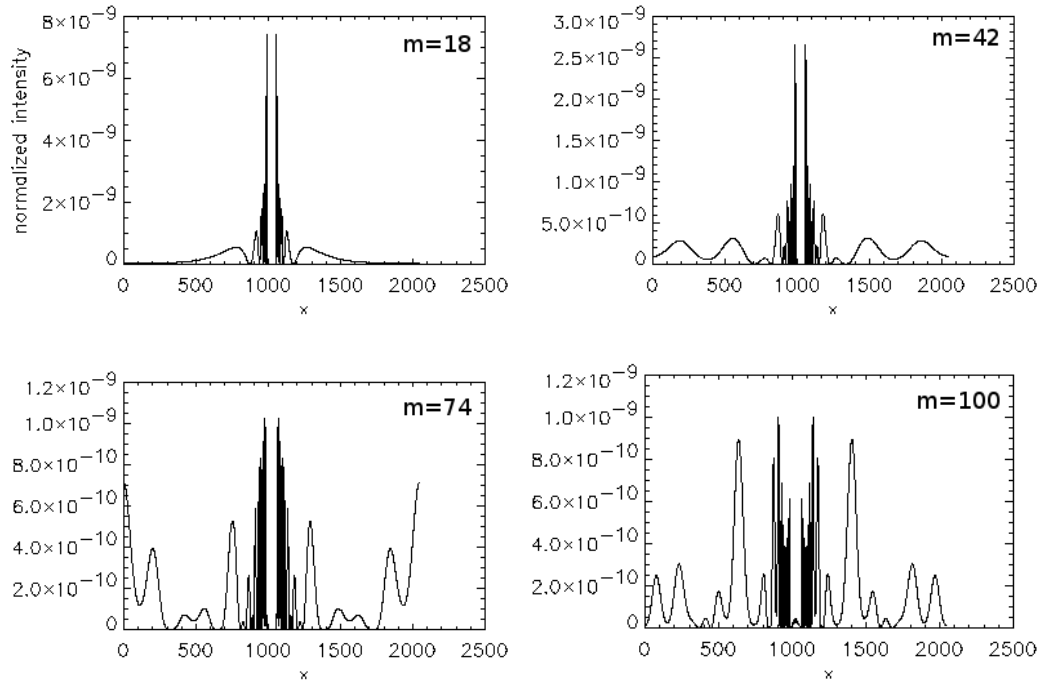


Figura 6.5: Profili della pupilla di uscita per gli OAM risultati migliori I profili hanno in ordinata la coordinata spaziale del piano della pupilla di uscita (distanza sul diametro) e in ordinata l'intensità luminosa corrispondente. Come si può vedere tutti i profili sono nulli al centro mentre hanno ali laterali più o meno estese. In questo modo è stata eliminata la luce della sorgente in asse rendendo possibile rilevare una eventuale sorgente minore. Nel profilo a $m = 0$ si notano vistosamente gli effetti del campionamento con un numero finito di armoniche che stenta a riprodurre la discontinuità di una funzione a scalino. Il profilo per $m=74$ evidenzia come a causa delle limitate dimensioni delle matrici alcuni risultati siano sovrastimati: l'area sottesa dalle ali del profilo è troncata e risulta quindi minore.

Capitolo 7

Prove al banco ottico

In laboratorio è stato creato un sistema ottico in grado di simulare un telescopio e su questo è stato posto l'ologramma¹ nella posizione equivalente al fuoco del telescopio. L'ologramma impone un OAM $m = 1$, è blazed al primo ordine e con carica topologica $m = 1$ per cui il valore dell'OAM rilevato corrisponde all'indice dell'ordine di diffrazione a cui si osserva.

Le prove effettuate hanno prodotto immagini all'ordine zero, quindi in assenza di OAM, all'ordine $m = 1$, caratterizzato dalla maggior quantità di luce in varie posizioni attorno al fuoco vero e all'ordine $m = 2$, rivelatosi il migliore per le applicazioni di coronografia.

I risultati non si differenziano particolarmente per quanto riguarda la posizione.

Il banco ottico era costituito di un laser (non perfettamente monomodo), due filtri neutri, due lenti utilizzate come beam expander con focale rispettivamente di $f_1 = -25\text{ mm}$ e $f_2 = 250\text{ mm}$, una lente convergente con focale $f_3 = 400\text{ mm}$ con funzione di telescopio, l'ologramma al fuoco, una lente convergente con $f_4 = 300\text{ mm}$ come collimatore e uno specchio piano per indirizzare il fascio uscente alla camera.

L'ologramma, un reticolo da 20 linee al mm , ha un'area attiva di $2.6 \times 2.6\text{ mm}^2$, una singolarità ottica di $50\text{ }\mu\text{m}$. e un'efficienza dell'80% alla lunghezza d'onda di 632.8 nm [8].

¹gentilmente fornito dall'Institut fuer Experimentalphysik, University of Wien, Zeilinger Gruppe

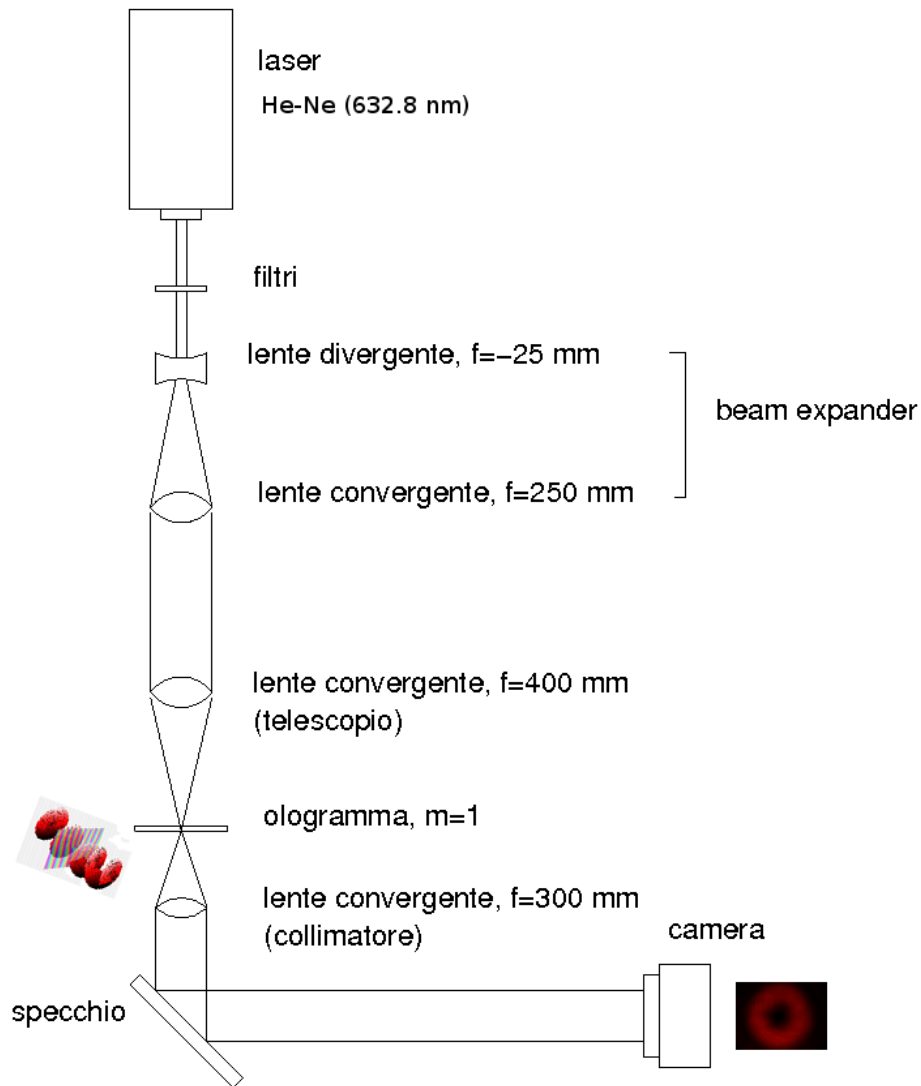


Figura 7.1: Schema del banco ottico. Sono visibili il laser, i due filtri neutri utilizzati per ridurre l'intensità e le due lenti utilizzate come beam expander. Il fascio, opportunamente focalizzato incide poi sull'ologramma che esercitando un momento torcente ne trasforma i modi in modi LG, dotati quindi di momento angolare. Una successiva collimazione permette infine di rilevare l'immagine con un CCD.

I dati rilevati evidenziano la parziale inadeguatezza strumentale del banco ottico. Il laser multimodo risulta essere una sovrapposizione di diversi modi gaussiani, e nel percorso ottico non si forma la figura di Airy. Per questi motivi i profili estrapolati sono difficilmente confrontabili con i risultati delle simulazioni.

Nonostante questi problemi è possibile verificare come il profilo ottenuto per $m = 2$ sia nettamente migliore, nonostante il rumore, per l'annullarsi completamente dell'intensità nella zona centrale, caratteristica questa dei vortici di indice pari. Il vortice unitario presenta invece un'attenuazione centrale con uno zero singolo.

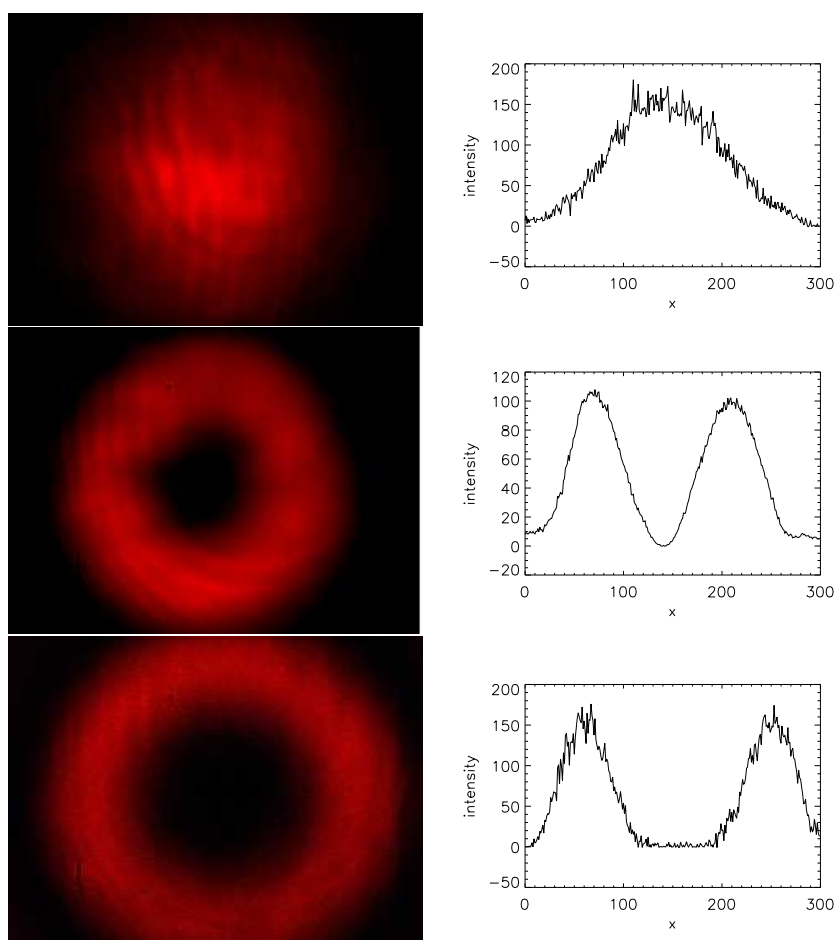


Figura 7.2: Immagini ottenute dalle prove al banco ottico e relativi profili estrapolati per $m = 0, 1, 2$. Risulta evidente la maggior efficienza, per le applicazioni studiate, del vortice di OAM pari a 2.

Capitolo 8

Conclusioni

Lo studio per definire l'OAM più efficace per la costruzione di una maschera di fase da utilizzare in un coronografo ha sostanzialmente confermato le previsioni analitiche di una migliore resa per quanto riguarda valori pari del momento angolare. Sperimentalmente ci si è concentrati su valori di $m = 0, 1, 2$. Come già accennato, infatti, vortici con carica topologica non unitaria sono instabili alle perturbazioni, tanto più quanto più grande è il valore della carica.

In particolare un OAM=2 sembra il candidato favorito per un utilizzo pratico. Il basso valore di carica implica al massimo un decadimento in due vortici distinti, rimanendo quindi in uno scenario gestibile (utilizzare $m = 100$ significherebbe il decadimento di un vortice in fino a 100 altri vortici). Questo valore del momento angolare orbitale, inoltre, ha il pregio di non essere soggetto a particolari problemi in caso di fasci non monocromatici, al contrario degli altri valori di carica topologica che disperdono la luce a seconda della frequenza. Non è da trascurare la minor difficoltà costruttiva di una maschera di fase per questo valore rispetto a valori più elevati.

Le prove al banco ottico hanno prodotto risultati significativi per quanto riguarda la validità di un vortice di carica $m = 2$. Anche se non è stato possibile effettuare test per vortici con cariche maggiori, risulta evidente che il miglioramento ottenibile dall'utilizzo OAM maggiori non sarebbe apprezzabile, non giustificherebbe quindi gli sforzi tecnologici indispensabili per un'eventuale produzione.

In definitiva, considerando la trattazione analitica, l'analisi numerica e le prove al banco ottico, al momento risulta preferibile, per l'applicazione alla coronografia, una maschera di fase con carica topologica pari a 2.

Bibliografia

- [1] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman: *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian lase modes*, Phys. Rev. **45**, 11 (1992)
- [2] L. Allen, M. J. Padgett: *The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the intation of their angular momentum density*, Optics Communications 184 (2000) 67-71
- [3] Richard A. Beth: *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*, Phys. Rev. **50** (1936)
- [4] I.V. Basistiy, M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov: *Optical wavefront dislocation and their properties*, Optics Communications 119 (1995) 604-612
- [5] Martin Harwit: *Photon orbital angular momentum in astrophysics*, The Astrophysical Journal, 597:1266-1270,2003 November 10
- [6] Gabriele Anzolin: *Applicazioni astronomiche del momento angolare orbitale della luce*, 2005
- [7] Anna Sponselli: *Considerazioni sul Momento Angolare Orbitale del Fotone per Applicazioni Astrofisiche*, 2006
- [8] F. Tamburini, G. Anzolin, G. Umbriaco, A. Bianchini, C. Barbieri: *Overcoming the Rayleigh Criterion Limit with Optical Vortices*, Physical Review Letters 97, 163903 (2006)
- [9] G. F. Calvo, A. Picón, E. Bagan: *A Quantum Field Theory Twist to Photon Angular Momentum*
- [10] Konstantin Yu. Bliokh: *Geometrical Optics Beams with Vortices: Berry Phase and Orbital Angular Momentum Hall Effect*
- [11] , Sumant S. R. Oemrawsingh: *Optical Dislocations and Quantum Entanglement*, PhD Thesis, University of Leiden, 2004

- [12] A. T. O’Neil, I. Mac Vicar, L. Allen, M. J. Padgett: *Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam*, Phys. Rev. **88**, 5 (2002)
- [13] Jennifer E. Curtis, David G. Grier: *Structure of Optical Vortices*, Phys. Rev. **90**, 13
- [14] F. Tamburini, G. Umbriaco, G. Anzolin, C. Barbieri, A. Bianchini: *FrogEye, the Quantum Coronagraphic mask*, Mem. S.A.It. Suppl. 9,484 (2006)
- [15] D. Mawet, P. Riaud, O. Absil, J. Surdei: *Annular Groove Mask Coronagraph*
- [16] Gregory Foo, David M. Palacios, Grover A. Swartzlander Jr.: *Optical vortex coronagraph*, Optical Letters, **30**, 24
- [17] A. Ferrari R. Soummer, C. Aime: *Introduction to stellar coronagraphy*, arXiv:astrp-ph/0703655v3 2 May 2007
- [18] Grover A. Swartzlander Jr.: *Peering into darkness with a vortex spatial filter*, Optics Letter textbf26, 8
- [19] David Palacios, David Rozas, Grover A. Swatzlander Jr.: *Observed Scattering into a Dark Optical Vortex Core*, Phys. Rev. **88**, 10 (2002)
- [20] Jae Hoon Lee, Gregory Foo, Eric G. Johnson, Grover A. Swartzlander Jr.: *Experimental Verification of an Optical Vortex Coronagraph*, PRL **97**, 053901 (2006)
- [21] Oemrawsingh et al.: *Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths*, APPLIED OPTICS Vol. 43, No. 3, 20 January 2004
- [22] Vaziri et al.: *Superpositions of the Orbital Angular Momentum for Applications in Quantum Experiments*, arXiv:quant-ph/0111033 2003
- [23] A. Quinnerbach: *Coronagraphic Methods for the Detection of Terrestrial Planets*, workshop at Leiden University, 2004
- [24] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 1962
- [25] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci: *Elementi di Fisica Elettromagnetismo*, seconda edizione

- [26] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë: *Quantum Mechanics*, Wiley-Vch
- [27] Albert Messiah: *Quantum Mechanics*, Dover Publications, 1999
- [28] A. F. Borghesani: *Introduzione alla Struttura della Materia*, Edizioni Libreria Progetto, 1997
- [29] Sonja Franke-Arnold, Stephen M Barnett, Eric Yao, Jonathan Leach, Johannes Courtial, Miles Padgett: *Uncertainty principle for angular position and angular momentum*, New Journal of Physics **6** (2004) 103
- [30] John Lekner: *Helical light pulses*, J. Opt A: Pure Appl. Opt. **6** (2004) L29-L32
- [31] Padgett M. J., www.physics.gla.ac.uk/Optics/Miles